الأجزاء الداخلية :

أشرنا سابقاً إلى أن $A^\circ, A \subseteq X$

ومن الواضح إذا كان $A \subseteq B$ فإن $A^\circ \subseteq A$

$A^\circ \subseteq B^\circ$

وبالتعريف لدينا A مفتوحة $\Longleftrightarrow A = A^\circ$

نضيف إلى ذلك الآتي :

[1] A° تساوي اجتماع جميع المجموعات المفتوحة المحتواة في A

البرهان : نفرض u اجتماع جميع المجموعات المفتوحة في A

ولنثبت أن $A^\circ = u$

الإثبات : نفرض $x \in x_0$

يوجد كره مفتوحة $\Rightarrow \exists B(x, r) \subseteq A$

وكل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة

$\Rightarrow A^\circ \subseteq u$

ومن جهة ثانية $x \in u$ هذا يعني أن x ينتمي لإحدى المجموعات المفتوحة المحتواة في A هذا يعني أن نقطة داخلية أي :

$x \in u \Rightarrow A^\circ \Rightarrow u \subseteq A^\circ$

[2] A° هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A

مبرهنة : لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من الفضاء المتري X فإن القضايا التالية محققة دوماً :

1) $X^\circ = X$ لأن X مفتوحة.

2) $\phi^\circ = \phi$ لأن ϕ مفتوحة.

3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ لأن A مفتوحة.

4) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

البرهان : لدينا $A^\circ \subseteq A$, $B \subseteq B^\circ$ دوماً

$A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B \Rightarrow (A^\circ \cap B^\circ) \subseteq (A \cap B)^\circ$

ولكن : $A^\circ \cap B^\circ = (A^\circ \cap B^\circ)^\circ$

$\Rightarrow A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$

Subject | Date |

ومن جهة ثانية ،

$A\cap B\subseteq A$

$A\cap B\subseteq B$

ومنه

$(A\cap B)^{\circ}\subseteq A^{\circ}$

$(A\cap B)^{\circ}\subseteq B^{\circ}$

$\Rightarrow (A\cap B)^{\circ}\subseteq (A^{\circ}\cap B^{\circ})$

المجموعات المغلقة :

لتكن F مجموعة مفتوحة جزئية من الفضاء المتري X نسمي f مجموعة مغلقة إذا كانت متممتها مفتوحة.

$X\setminus(X\setminus f) = F$

f مغلقة $\Leftrightarrow$ $X\setminus F$ مفتوحة.

مبرهنة : إن المجموعات المغلقة في فضاء متري تحقق الخواص التالية :

1] أي تقاطع لمجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة .

2] اجتماع عدد منته من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة .

3] X و ϕ مجموعتان مغلقتان.

البرهان :

لتكن $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ أسرة من المجموعات المغلقة.

و لنثبت أن تقاطعها هو مجموعة مغلقة.

نأخذ المتممة $A\setminus \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}(X\setminus f_\alpha)$

متممة التقاطع = اجتماع المتممات

$= \bigcup (X\setminus F_\alpha)$

و المتممات جميعها مفتوحة و أي اجتماع لمجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة و بالتالي :

$f_1, f_2, \text{———}, f_n$

$X\setminus \bigcup_{\alpha\in I}^{n} f_i \quad \bigcap_{i=1}^{n}(X\setminus f_i)$

مفتوحة

مفتوحة

حسب دي مورغان .

المتممات المفتوحة ونلاحظ مجموعة من المجموعات بالنسبة لمترية مفتوحة.

X ، Φ هما مغلقتان لأنهما ~~مفتوحتان~~ مفتوحتان وكل منهما متممة للأخرى.

ملاحظة:

X ، Φ مجموعتان مفتوحتان ومغلقتان في أي فضاء متري.

أمثلة: {كل الأمثلة مأخوذة من الفضاء R}

مثال 1: لو أخذنا R : هو مجموعة مفتوحة ومغلقة.

لو أخذنا المجموعة A ؛ $A=\{1,2,3\}$ هذه المجموعة غير مفتوحة لأن $A^\circ \neq \Phi$ لو أخذنا R.

مغلقة لأنها اجتماع لأربع مجالات مفتوحة أي:

$$R\setminus A =]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,3[\cup]3,+\infty[$$

لو أخذنا Z ؛ $Z^\circ \neq \Phi$ وبالتالي المجموعة غير مفتوحة ولكن مغلقة.

Z مجموعة مغلقة لأن متممتها مفتوحة.

{أي اجتماع لمجالات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة}

$$R\setminus Z = \bigcup_{x\in Z}]n,n+1[$$

$$]0,1[\cup]1,2[\cup]2,3[\cup] \ldots$$

مثال 2: $[a,b]$

المجال المغلق هو مجموعة مغلقة غير مفتوحة ومتممة مفتوحة

$[a,+\infty[$ مجموعة مغلقة لأن متممة مفتوحة.

$]a,b[$ 〃 〃 〃 〃 مغلقة

$]a,b]$ غير مفتوح وغير مغلق

Subject

Date

مثال [3]: لنأخذ الفضاء المتري المتقطع

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & ; x \neq y \\ 0 & ; x = y \end{cases} \qquad B(x, \tfrac{1}{2}) = \{x\}$$

- إن المجموعات الوحيدة العنصر تشكل مجموعة مفتوحة وهذا يؤدي إلى أن أي مجموعة من هذا الفضاء هي مجموعة مفتوحة لأن

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$$

ما هي المجموعات المغلقة من هذا الفضاء؟

من ذلك كل المجموعات من هذا الفضاء هي مجموعات مغلقة لأن أي مجموعة في هذا الفضاء هي مجموعة مغلقة ومفتوحة.

$$X = \{a, b, c\}$$

$$\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$$

ننظر إلى المجموعات المغلقة من وجهة نظر أخرى كالآتي:

$$\{X, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \phi\}$$

ليكن X فضاء متري $A \subseteq X$ و $x \in X$

نسمي x نقطة تراكم للمجموعة A إذا كان أي جوار للنقطة x يتقاطع مع المجموعة A بنقاط مختلفة عن x نفسها

أي:

$$U \cap A \setminus \{x\} \neq \phi$$

حيث أن U جوار كيفي للنقطة x

- إن مجموعة نقاط التراكم للمجموعة A تسمى المجموعة المشتقة، ويرمز لها A'

تعريف: X فضاء متري $A \subseteq X$ و $x \in X$

نسمي النقطة x نقطة لاصقة للمجموعة A إذا كان أي جوار لـ x يتقاطع مع A

$U \cap A \neq \phi$. - إن مجموعة النقاط اللاصقة للمجموعة A تسمى لصاقة A ويرمز لها بالرمز $\bar{A}$ وبعض المؤلفين (غلافة A)

- واضح من التعريفين أن كل نقطة تراكم هي النقطة لاصقة أي: $A' \subseteq \bar{A}$

وإن كانت $x \in A$ فستكون لاصقة لها $x \in A \Rightarrow x \in \bar{A}$

لأن أي جوار للنقطة x يتقاطع مع A على الأقل بالنقطة x.